

## 知识点 18——二次函数概念、性质和图像

### 一、选择题

1. (2019·温州) 已知二次函数  $y=x^2-4x+2$ , 关于该函数在  $-1 \leq x \leq 3$  的取值范围内, 下列说法正确的是 ( )

- A. 有最大值-1, 有最小值-2  
B. 有最大值 0, 有最小值-1  
C. 有最大值 7, 有最小值-1  
D. 有最大值 7, 有最小值-2

【答案】D

【解析】 $\because$  二次函数  $y=x^2-4x+2=(x-2)^2-2$ ,  $\therefore$  该函数在  $-1 \leq x \leq 3$  的取值范围内, 当  $x=2$  时,  $y$  有最小值 -2; 当  $x=-1$  时,  $y$  有最大值 7. 故选 D.

2. (2019·绍兴) 在平面直角坐标系中, 抛物线  $y=(x+5)(x-3)$  经过变换后得到抛物线  $y=(x+3)(x-5)$ , 则这个变换可以是 ( )

- A. 向左平移 2 个单位  
B. 向右平移 2 个单位  
C. 向左平移 8 个单位  
D. 向右平移 8 个单位

【答案】B

【解析】 $y=(x+5)(x-3)=(x+1)^2-16$ , 顶点坐标是  $(-1, -16)$ .

$y=(x+3)(x-5)=(x-1)^2-16$ , 顶点坐标是  $(1, -16)$ . 所以将抛物线  $y=(x+5)(x-3)$  向右平移 2 个单位长度得到抛物线  $y=(x+3)(x-5)$ , 故选 B.

3. (2019·嘉兴) 小飞研究二次函数  $y=-(x-m)^2-m+1$  ( $m$  为常数) 性质时如下结论:

- ①这个函数图象的顶点始终在直线  $y=-x+1$  上;  
②存在一个  $m$  的值, 使得函数图象的顶点与  $x$  轴的两个交点构成等腰直角三角形;  
③点 A ( $x_1, y_1$ ) 与点 B ( $x_2, y_2$ ) 在函数图象上, 若  $x_1 < x_2$ ,  $x_1+x_2 > 2m$ , 则  $y_1 < y_2$ ;  
④当  $-1 < x < 2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 则  $m$  的取值范围为  $m \geq 2$ .

其中错误结论的序号是 ( )

- A. ①  
B. ②  
C. ③  
D. ④

【答案】C

【解析】二次函数  $y=-(x-m)^2-m+1$  ( $m$  为常数),

① $\because$  顶点坐标为  $(m, -m+1)$  且当  $x=m$  时,  $y=-m+1$ ,

$\therefore$  这个函数图象的顶点始终在直线  $y=-x+1$  上,

故结论①正确;

②假设存在一个  $m$  的值, 使得函数图象的顶点与  $x$  轴的两个交点构成等腰直角三角形,

令  $y=0$ , 得  $-(x-m)^2-m+1=0$ , 其中  $m \leq 1$ ,

解得：  $x = m - \sqrt{-m+1}$  ,  $x = m + \sqrt{-m+1}$  ,

∵ 顶点坐标为  $(m, -m+1)$  , 且顶点与  $x$  轴的两个交点构成等腰直角三角形,

∴  $|-m+1| = |m - (m - \sqrt{-m+1})|$  ,

解得：  $m=0$  或  $1$ ,

∴ 存在  $m=0$  或  $1$  , 使得函数图象的顶点与  $x$  轴的两个交点构成等腰直角三角形,

故结论②正确;

③ ∵  $x_1 + x_2 > 2m$ ,

∴  $\frac{x_1 + x_2}{2} > m$  ,

∵ 二次函数  $y = -(x-m)^2 - m+1$  ( $m$  为常数) 的对称轴为直线  $x=m$ ,

∴ 点 A 离对称轴的距离小于点 B 离对称轴的距离,

∵  $x_1 < x_2$  , 且  $-1 < 0$ ,

∴  $y_1 > y_2$ .

故结论③错误;

④ 当  $-1 < x < 2$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 且  $-1 < 0$ ,

∴  $m$  的取值范围为  $m \geq 2$ .

故结论④正确.

故选 C.

4. (2019 • 杭州) 在平面直角坐标系中, 已知  $a \neq b$ , 设函数  $y = (x+a)(x+b)$  的图象与  $x$  轴有  $M$  个交点, 函数  $y = (ax+1)(bx+1)$  的图象与  $x$  轴有  $N$  个交点, 则 ( )

- A.  $M=N-1$  或  $M=N+1$     B.  $M=N-1$  或  $M=N+2$     C.  $M=N$  或  $M=N+1$     D.  $M=N$  或  $M=N-1$

【答案】A

【解析】先把两个函数化成一般形式, 若为二次函数, 再计算根的判别式, 从而确定图象与  $x$  轴的交点个数, 若一次函数, 则与  $x$  轴只有一个交点, 据此解答. ∵  $y = (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + 1$ , ∴  $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$ , ∴ 函数  $y = (x+a)(x+b)$  的图象与  $x$  轴有 2 个交点, ∴  $M=2$ , ∵ 函数  $y = (ax+1)(bx+1) = abx^2 + (a+b)x + 1$ , ∴ 当  $ab \neq 0$  时,  $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 > 0$ , 函数  $y = (ax+1)(bx+1)$  的图象与  $x$  轴有 2 个交点, 即  $N=2$ , 此时  $M=N$ ; 当  $ab=0$  时, 不妨令  $a=0$ , ∵  $a \neq b$ , ∴  $b \neq 0$ , 函数  $y = (ax+1)(bx+1) = bx+1$  为一次函数, 与  $x$  轴有一个交点, 即  $N=1$ , 此时  $M=N+1$ ; 综上所述,  $M=N$  或  $M=N+1$ . 故选 C.

5. (2019 • 烟台) 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的  $y$  与  $x$  的部分对应值如下表:

|   |    |   |    |    |   |
|---|----|---|----|----|---|
| x | -1 | 0 | 2  | 3  | 4 |
| y | 5  | 0 | -4 | -3 | 0 |

下列结论：①抛物线的开口向上；②抛物线的对称轴为直线  $x=2$ ；③当  $0 < x < 4$  时， $y > 0$ ；④抛物线与  $x$  轴的两个交点间的距离是 4；⑤若  $A(x_1, 2)$ ， $B(x_2, 3)$  是抛物线上两点，则  $x_1 < x_2$ 。

其中正确的个数是（ ）。

- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5

**【答案】B**

**【解题过程】**先根据二次函数的部分对应值在坐标系中描点、连线，由图象可以看出抛物线开口向上，所以结论①正确，由图象（或表格）可以看出抛物线与  $x$  轴的两个交点分别为  $(0, 0)$ ， $(4, 0)$ ，所以抛物线的对称轴为直线  $x=2$  且抛物线与  $x$  轴的两个交点间的距离为 4，所以结论②和④正确，有抛物线的图象可以看出当  $0 < x < 4$  时， $y < 0$ ，所以结论③错误，由图象可以看出当抛物线上的点的纵坐标为 2 或 3 时，对于的点均有两个，若  $A(x_1, 2)$ ， $B(x_2, 3)$  是抛物线上两点，既有可能  $x_1 < x_2$ ，也有可能  $x_1 > x_2$ ，所以结论⑤错误。

6. (2019·绍兴) 在平面直角坐标系中，抛物线  $y = (x+5)(x-3)$  经过变换后得到抛物线  $y = (x+3)(x-5)$ ，则这个变换可以是( )

- A. 向左平移 2 个单位                      B. 向右平移 2 个单位  
C. 向左平移 8 个单位                      D. 向右平移 8 个单位

**【答案】B**

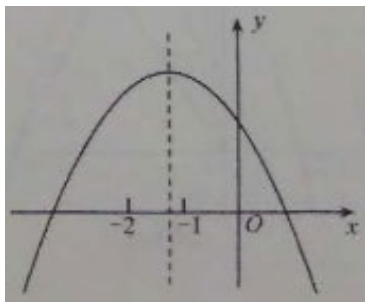
**【解析】** $y = (x+5)(x-3) = (x+1)^2 - 16$ ，顶点坐标是  $(-1, -16)$ 。

$y = (x+3)(x-5) = (x-1)^2 - 16$ ，顶点坐标是  $(1, -16)$ 。所以将抛物线  $y = (x+5)(x-3)$  向右平移 2 个单位长度得到抛物线  $y = (x+3)(x-5)$ ，故选 B。

7. (2019·益阳) 已知二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  如图所示，下列结论：①  $ac < 0$ ，②  $b-2a < 0$ ，③

$b^2 - 4ac < 0$ ，④  $a-b+c < 0$ ，正确的是（ ）

- A. ①②              B. ①④              C. ②③              D. ②④



第 7 题图

**【答案】A**

**【解析】**∵ 抛物线开口向下，且与  $y$  的正半轴相交，∴  $a < 0$ ， $c > 0$ ，∴  $ac < 0$ ，故①正确；

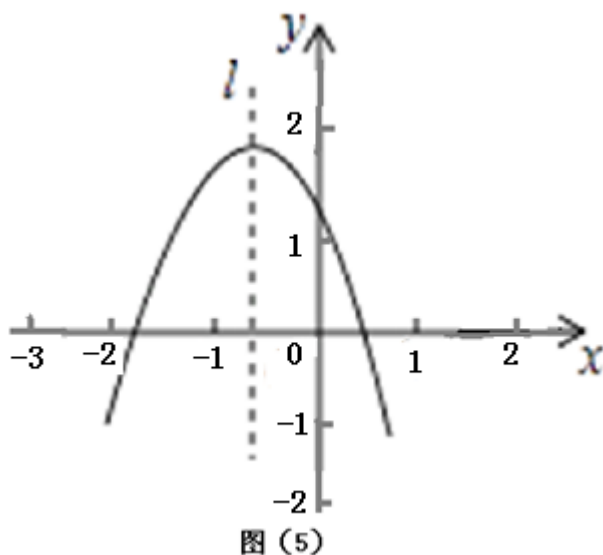
∵对称轴在-1至-2之间, ∴ $-2 < -\frac{b}{2a} < -1$ , ∴ $4a < b < 2a$ , ∴ $b-2a < 0$ , 故②正确;

∵抛物线与x轴有两个交点, ∴ $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ , ∴③错误;

∵当 $x=-1$ 时,  $y=a-b+c > 0$ , ∴④错误.

∴正确的说法是①②. 故选 A.

8. (2019·娄底) 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  的图象如图(5)所示, 下列结论中正确的有 ( )



①  $abc < 0$     ②  $b^2 - 4ac < 0$     ③  $2a > b$     ④  $(a+c)^2 < b^2$

A. 1个    B. 2个    C. 3个    D. 4个

【答案】A

【解析】解: ①由抛物线的开口方向向下知  $a < 0$ , 对称轴在y轴的左侧得a、b同号, 抛物线与y轴交于正半轴得  $c > 0$ , 所以  $abc > 0$ ; 故结论①错误;

②由抛物线与x轴有两个交点得  $b^2 - 4ac > 0$ , 故结论②错误;

③由图象知对称轴  $x = -\frac{b}{2a} > -1$  得  $\frac{b}{2a} < 1$ ; 由  $a < 0$ , 结合不等式的性质三可得  $b > 2a$ , 即  $2a < b$ ; 故结论③错误;    ④由图象知: 当  $x=1$  时,  $y < 0$  即  $a+b+c < 0$ ; 当  $x=-1$  时,  $y > 0$  即  $a-b+c > 0$ ;

∴ $(a+b+c)(a-b+c) < 0$ , 即  $(a+c)^2 - b^2 < 0$ ; ∴ $(a+c)^2 < b^2$ . 故结论④正确.

故答案 A 正确.

9. (2019·济宁) 将抛物线  $y = x^2 - 6x + 5$  向上平移两个单位长度, 再向右平移一个单位长度后, 得到的抛物线解析式是 ( )

A.  $y = (x-4)^2 - 6$     B.  $y = (x-1)^2 - 3$     C.  $y = (x-2)^2 - 2$     D.  $y = (x-4)^2 - 2$

【答案】D

【解析】 $y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$ , 把向上平移两个单位长度, 再向右平移一个单位长度后, 得  $y = (x-3-1)^2 - 4 + 2$ , 即  $y = (x-4)^2 - 2$ .

2. (2019 · 巴中) 二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象如图所示, 下列结论①  $b^2 > 4ac$ , ②  $abc < 0$ , ③  $2a + b - c > 0$ ,

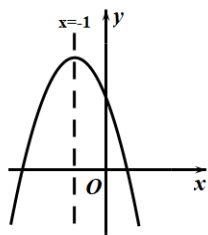
3. ④  $a + b + c < 0$ , 其中正确的是( )

A. ①④

B. ②④

C. ②③

D. ①②③④

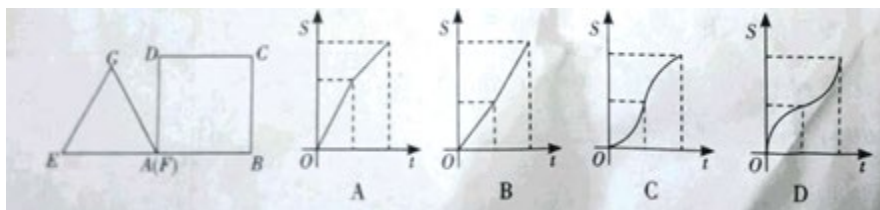


第9题图

【答案】A

【解析】①: 因为图象与  $x$  轴有两个不同的交点, 所以  $b^2 - 4ac > 0$ , 即  $b^2 > 4ac$ , 故①正确; ②: 图象开口向下, 故  $a < 0$ , 图象与  $y$  轴交于正半轴, 故  $c > 0$ , 因为对称轴为  $x = -1$ , 所以  $-\frac{b}{2a} = -1$ , 所以  $2a = b$ , 故  $b < 0$ , 所以  $abc > 0$ , ②错误; ③:  $a < 0, b < 0, c > 0$ , 所以  $2a + b - c < 0$ , ③错误; ④当  $x = 1$  时,  $y = a + b + c$ , 由图可得,  $x = -3$  时,  $y < 0$ , 由对称性可知, 当  $x = 1$  时,  $y < 0$ , 即  $a + b + c < 0$ , 故④正确. 综上所述, ①④正确, 故选 A.

10. (2019 · 达州) 如图, 边长都为 4 的正方形 ABCD 和正三角形 EFG 如图放置, AB 与 EF 在一条直线上, 点 A 与点 F 重合. 现将  $\triangle EFG$  沿 AB 方向以每秒 1 个单位的速度匀速运动, 当点 F 与点 B 重合时停止, 在这个运动过程中正方形 ABCD 和  $\triangle EFG$  重叠部分的面积  $S$  与运动时  $t$  的函数图像大致是( )



【答案】C

【思路分析】可分两种情况, 第一种情况重合部分为三角形, 第二种情况重合部分为四边形, 分别求出对应的函数关系式即可.

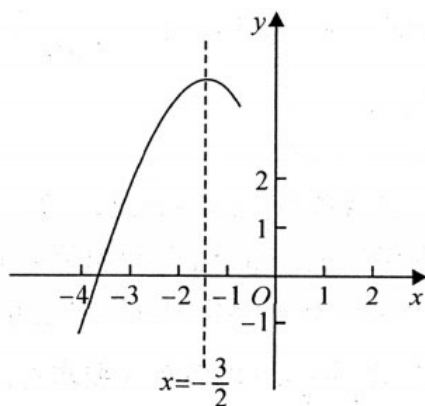
【解题过程】运动过程中, 当顶点  $G$  在正方形外部时, 重合部分为三角形, 设运动时间为  $t$ , 面积  $S$  与

$t$  的函数关系式为  $y = \frac{\sqrt{3}t^2}{2}$ , 函数图像为开口向上的二次函数, 当顶点  $G$  在正方形内部时, 重合部

分为四边形, 设运动时间为  $t$ , 面积  $S$  与  $t$  的函数关系式为  $y = -\frac{\sqrt{3}t^2}{2} + 4\sqrt{3}t - 4\sqrt{3}$ , 函数图像为

开口向下的二次函数, 故选 C.

11. (2019·凉山) 二次函数  $y=ax^2+bx+c$  的部分图象如图所示, 有以下结论: ①  $3a-b=0$ ; ②  $b^2-4ac>0$ ; ③  $5a-2b+c>0$ ; ④  $4b+3c>0$ , 其中错误结论的个数是 ( ▲ )
- A. 1    B. 2    C. 3    D. 4

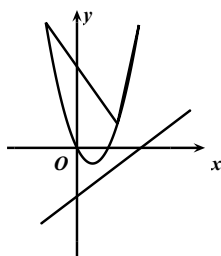


第 11 题图

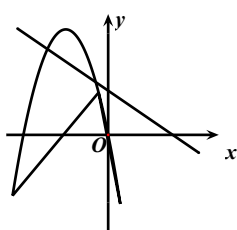
【答案】A

【解析】根据对称轴  $-\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$  得  $b=3a$ , 故可得  $3a-b=0$ , 所以结论①正确; 由于抛物线与  $x$  轴有两个不同的交点, 所以  $b^2-4ac>0$ , 结论②正确; 根据结论①可知  $b=3a$ ,  $\therefore 5a-2b+c=5a-6a+c=-a+c$ , 观察图像可知  $a<0, c>0$ ,  $\therefore 5a-2b+c=-a+c>0$ , 结论③正确; 根据抛物线的轴对称性可知抛物线与  $x$  轴的右交点在原点与  $(1, 0)$  之间 (不含这两点), 所以当  $x=1$  时,  $y=a+b+c<0$ ,  $\therefore a=\frac{1}{3}b$ ,  $\therefore \frac{4}{3}b+c<0$ ,  $\therefore 4b+3c<0$ , 所以结论④错误. 故选 A.

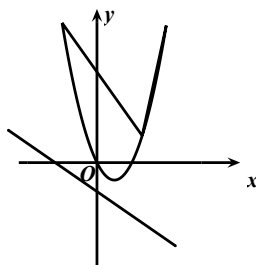
12. (2019·攀枝花) 在同一坐标系中, 二次函数  $y=ax^2+bx$  与一次函数  $y=bx-a$  的图象可能是 ( )



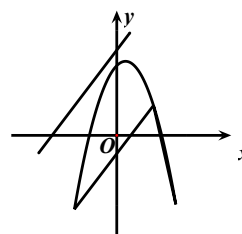
A.



B.



C.



D.

【答案】C

【解析】据参数符号可排除 A、D 选项, 联立两函数解析式所得方程无解, 则两函数图象无交点, 故选 C.

【知识点】二次函数的图象; 一次函数的图象

13. (2019·衢州) 二次函数  $y=(x-1)^2+3$  图象的顶点坐标是 ( )
- A.  $(1, 3)$     B.  $(1, -3)$     C.  $(-1, 3)$     D.  $(-1, -3)$

【答案】A

【解析】本题考查二次函数顶点坐标的确定，二次函数  $y=a(x-h)^2+k$  的顶点坐标为  $(h, k)$ ，所以  $y=(x-1)^2+3$  的顶点坐标是  $(1, 3)$ ，故选 A.

14. (2019 · 重庆 B 卷) 物线  $y=-3x^2+6x+2$  的对称轴是 ( )

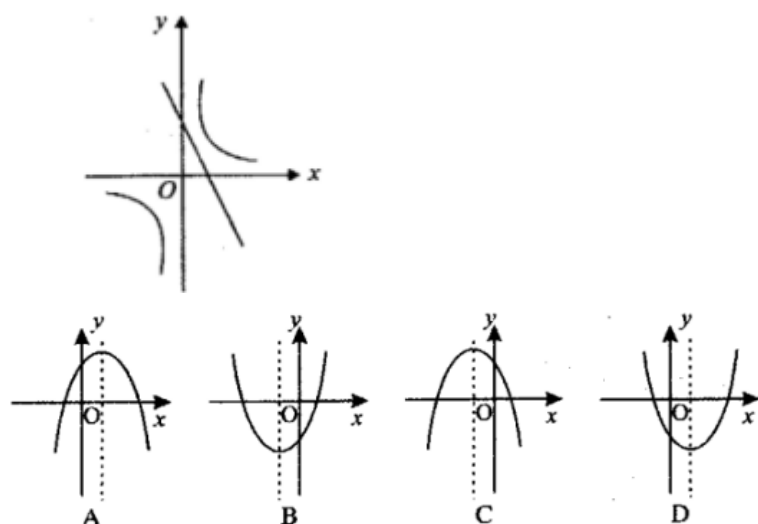
- A. 直线  $x=2$       B. 直线  $x=-2$       C. 直线  $x=1$       D. 直线  $x=-1$

【答案】C

【解析】设二次函数的解析式是  $y=ax^2+bx+c$ ，则二次函数的对称轴为直线  $x=-\frac{b}{2a}$ ，顶点横坐标为

$-\frac{b}{2a}$  顶点纵坐标为  $\frac{4ac-b^2}{4a}$ . 所以抛物线  $y=-3x^2+6x+2$  的对称轴是直线  $x=1$ . 故选 C.

15. (2019 · 自贡) 一次函数  $y=ax+b$  与反比例函数  $y=\frac{c}{x}$  的图象如图所示，则二次函数  $y=ax^2+bx+c$  的大致图象是 ( )



【答案】A.

【解析】∵ 双曲线  $y=\frac{c}{x}$  经过一、三象限，

∴  $c > 0$ .

∴ 抛物线与  $y$  轴交于正半轴.

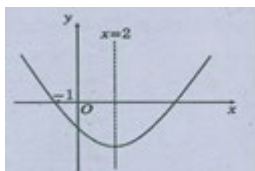
∵ 直线  $y=ax+b$  经过第一、二和四象限，

∴  $a < 0$ ,  $b > 0$ , 即  $-\frac{b}{2a} < 0$ .

∴ 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  开口向下，对称轴在  $y$  轴的右侧.

故选 A.

16. (2019 · 遂宁) 二次函数  $y=x^2-ax+b$  的图像如图所示，对称轴为直线  $x=2$ ，下列结论不正确的是 ( )



- A.  $a=4$   
 B. 当  $b=-4$  时, 顶点的坐标为  $(2, -8)$   
 C. 当  $x=-1$  时,  $b>-5$   
 D. 当  $x>3$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大

**【答案】C**

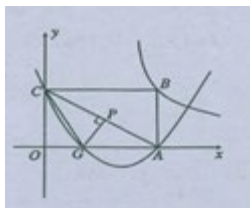
**【解析】**选项 A, 由对称轴为直线  $x=2$  可得  $-\frac{a}{2}=2$ ,  $\therefore a=4$ , 正确; 选项 B,  $\because a=4, b=-4$

$\therefore$  代入解析式可得,  $y=x^2-4x-4$ , 当  $x=2$  时,  $y=-8$ ,  $\therefore$  顶点的坐标为  $(2, -8)$ , 正确; 选项 C, 由图像可知,  $x=-1$  时,  $y=0$ , 代入解析式得  $B=-5$ ,  $\therefore$  错误; 选项 D 由图像可以看出当  $x>3$  时, 在对称轴的右侧,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 正确, 故选 C.

## 二、填空题

1. (2019·遂宁) 如图, 在平面直角坐标系中, 矩形 OABC 的顶点 O 落在坐标原点, 点 A, 点 C 分别在 x 轴, y 轴的正半轴上, G 为线段 OA 上一点, 将  $\triangle OCG$  沿 CG 翻折, O 点恰好落在对角线 AC 上的点 P

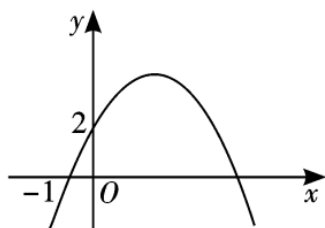
处, 反比例函数  $y=\frac{12}{x}$  经过点 B, 二次函数  $y=ax^2+bx+c$  ( $a\neq 0$ ) 的图像经过 C (0, 3), G、A 三点, 则该二次函数的解析式为 (填一般式)



**【答案】**  $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{4}x+3$

**【解析】** $\because$  矩形 OABC,  $C(0, 3) \therefore B$  点的纵坐标为 3,  $\because$  反比例函数  $y=\frac{12}{x}$  经过点 B,  $\therefore B(4, 3), A(4, 0)$ ,  $\therefore OA=4$ ,  $\because C(0, 3), \therefore OC=3$ ,  $\therefore$  Rt  $\triangle ACO$  中,  $AC=5$ . 设  $G(m, 0)$  则  $OG=m$ .  $\because$  翻折  $\therefore GP=OG=m, CP=CO=3, \therefore AP=2$ ,  $AG=4-m$ ,  $\therefore$  Rt  $\triangle AGP$  中,  $m^2+2^2=(4-m)^2 \therefore m=\frac{3}{2}, \therefore G(\frac{3}{2}, 0)$ ,  $\because A(4, 0) C(0, 3) G(\frac{3}{2}, 0) \therefore$  解析式为  $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{11}{4}x+3$

2. (2019·广元) 如图, 抛物线  $y=ax^2+bx+c$  ( $a\neq 0$ ) 过点  $(-1, 0), (0, 2)$ , 且顶点在第一象限, 设  $M=4a+2b+c$ , 则 M 的取值范围是\_\_\_\_\_.

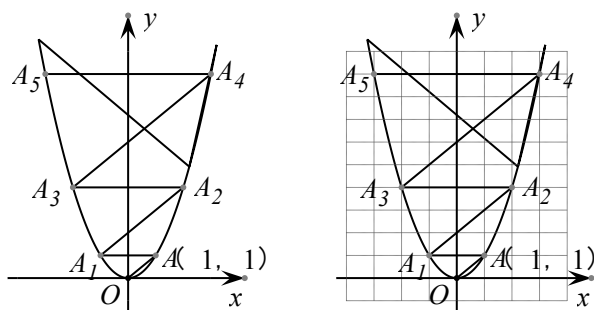


第2题图

【答案】  $-6 < M < 6$

【解析】  $\because y = ax^2 + bx + c$  过点  $(-1, 0), (0, 2), \therefore c = 2, a - b = -2, \therefore b = a + 2, \therefore$  顶点在第一象限,  $\therefore -\frac{b}{2a} > 0, \therefore a < 0, b > 0, a + 2 > 0, a > -2, \therefore -2 < a < 0, M = 4a + 2b + c = 4a + 2(a + 2) + 2 = 6a + 6, \therefore -6 < M < 6$ .

3. (2019·衡阳) 在平面直角坐标系中, 抛物线  $y = x^2$  的图象如图所示. 已知点  $A$  坐标为  $(1, 1)$ , 过点  $A$  作  $AA_1 \parallel x$  轴交抛物线于点  $A_1$ , 过点  $A_1$  作  $A_1A_2 \parallel OA$  交抛物线于点  $A_2$ , 过点  $A_2$  作  $A_2A_3 \parallel x$  轴交抛物线于点  $A_3$ , 过点  $A_3$  作  $A_3A_4 \parallel OA$  交抛物线于点  $A_4 \cdots$ , 依次进行下去, 则点  $A_{2019}$  的坐标为\_\_\_\_\_.



【答案】  $(-1010, 1010^2)$

【解析】  $A(1, 1), A_1(-1, 1), A_2(2, 4), A_3(-2, 4), A_4(3, 9), A_5(-3, 9), \dots, A_{2019}(-1000, 1000^2)$ .

4. (2019·株洲) 若二次函数  $y = ax^2 + bx$  的图像开口向下, 则  $a$  \_\_\_\_\_ 0 (填“=”或“>”或“<”).

【答案】  $<$

【解析】 二次函数开口向下, 则  $a < 0$ .

5. (2019·陇南) 将二次函数  $y = x^2 - 4x + 5$  化成  $y = a(x - h)^2 + k$  的形式为\_\_\_\_\_.

【答案】  $y = (x - 2)^2 + 1$

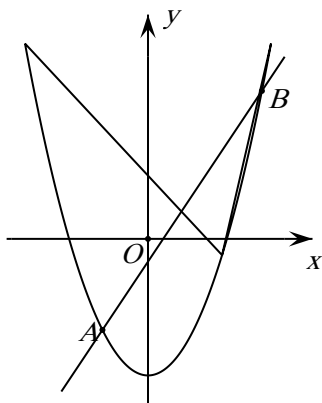
【解析】  $y = x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1$ , 故答案为:  $y = (x - 2)^2 + 1$ .

6. (2019·无锡) 某个函数具有性质: 当  $x > 0$  时,  $y$  随  $x$  的增大而增大, 这个函数的表达式可以是\_\_\_\_\_ (只要写出一个符合题意的答案即可).

【答案】  $y = x^2$

【解析】 本题主要考查了一次函数与二次函数的增减性,  $y = kx$  ( $k > 0$ ) 和  $y = ax^2$  ( $a > 0$ ) 都符合条件, 故答案可以为  $y = x^2$ .

7. (2019·济宁) 如图, 抛物线  $y=ax^2+c$  与直线  $y=mx+n$  交于  $A(-1, p)$ ,  $B(3, q)$  两点, 则不等式  $ax^2+mx+c>n$  的解集是\_\_\_\_\_.



【答案】 $x<-3$  或  $x>1$

【解析】由所给的图象可知,  $x<-3$  或  $x>1$  时,  $ax^2+c>-mx+n$ .

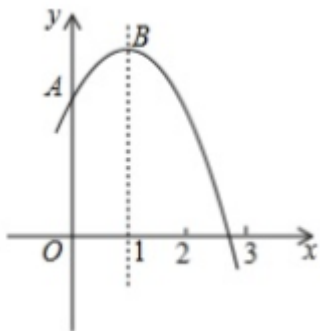
8. (2019·泰安) 若二次函数  $y=x^2+bx-5$  的对称轴为直线  $x=2$ , 则关于  $x$  的方程  $x^2+bx-5=2x-13$  的解为\_\_\_\_\_.

【答案】 $x_1=2, x_2=4$

【解析】 $\because$  二次函数  $y=x^2+bx-5$  的对称轴为直线  $x=2, \therefore -\frac{b}{2}=2, \therefore b=-4, \therefore$  原方程化为  $x^2-4x-5=2x-13$ , 解之, 得  $x_1=2, x_2=4$ .

9. (2019·达州) 如图, 抛物线  $y=-x^2+2x+m+1$  ( $m$  为常数) 交  $y$  轴于点  $A$ , 与  $x$  轴的一个交点在 2 和 3 之间, 顶点为  $B$ .

①抛物线  $y=-x^2+2x+m+1$  与直线  $y=m+2$  有且只有一个交点; ②若点  $M(-2, y^1)$ 、点  $N(\frac{1}{2}, y^2)$ 、点  $P(2, y^3)$  在该函数图像上, 则  $y^1<y^2<y^3$ ; ③将该抛物线向左平移 2 个单位, 在向下平移 2 个单位, 所得的抛物线解析式为  $y=-(x+1)^2+m$ ; ④点  $A$  关于直线  $x=1$  的对称点为  $C$ , 点  $D$ 、 $E$  分别在  $x$  轴和  $y$  轴上, 当  $m=1$  时, 四边形  $BCDE$  周长的最小值为  $\sqrt{34}+\sqrt{2}$ . 其中正确判断的序号是\_\_\_\_\_.



【答案】①③④

【解析】抛物线  $y = -x^2 + 2x + m + 1$  与直线  $y = m + 2$  的交点为：

$$m + 2 = -x^2 + 2x + m + 1,$$

$$\text{得： } x^2 - 2x + 1 = 0,$$

$$\text{因为 } b^2 - 4ac = 0,$$

∴ 抛物线  $y = -x^2 + 2x + m + 1$  与直线  $y = m + 2$  有且只有一个交点，①正确；

由图可得：  $y_1 < y_3 < y_2$ ，故②错误；

$y = -x^2 + 2x + m + 1 = -(x - 1)^2 + m + 2$ ，将该抛物线向左平移 2 个单位，在向下平移 2 个单位，所得的抛物线解析式为  $y = -(x + 1)^2 + m$ ，故③正确；

点 A 关于直线  $x = 1$  的对称点为 C，点 D、E 分别在 x 轴和 y 轴上，当  $m = 1$  时，四边形 BCDE 周长的最小值为  $\sqrt{34} + \sqrt{2}$ ，故④正确。

10. (2019·凉山) 当  $0 \leq x \leq 3$  时，直线  $y = a$  与抛物线  $y = (x - 1)^2 - 3$  有交点，则 a 的取值范围是\_\_\_\_\_.

【答案】  $-3 \leq a \leq -2$

【解析】 抛物线  $y = (x - 1)^2 - 3$  的顶点坐标为 (1, -3)，当  $x = 0$  时， $y = -2$ ，当  $x = 3$  时， $y = 1$ ，∴ 当  $0 \leq x \leq 3$  时， $-3 \leq y \leq -2$ ，∴ 直线  $y = a$  与抛物线有交点时，a 的取值范围为  $-3 \leq a \leq -2$ .

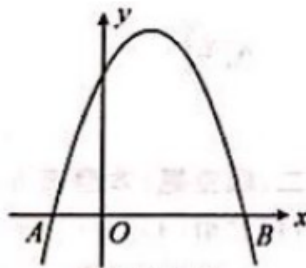
### 三、解答题

1. (2019 浙江省温州市，21，10 分) (本题满分 10 分)

如图，在平面直角坐标系中，二次函数  $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$  的图象交 x 轴于点 A, B (点 A 在点 B 的左侧).

(1) 求点 A, B 的坐标，并根据该函数图象写出  $y \geq 0$  时 x 的取值范围；

(2) 把点 B 向上平移  $m$  个单位得点  $B_1$ . 若点  $B_1$  向左平移  $n$  个单位, 将与该二次函数图象上的点  $B_2$  重合; 若点  $B_1$  向左平移  $(n+6)$  个单位, 将与该二次函数图象上的点  $B_3$  重合. 已知  $m>0$ ,  $n>0$ , 求  $m$ ,  $n$  的值.



**【解题过程】** (1) 令  $y=0$ , 则  $-\frac{1}{2}x^2+2x+6=0$ ,  $\therefore x_1=-2$ ,  $x_2=6$ ,  $\therefore A(-2, 0)$ ,  $B(6, 0)$ .

由函数图像得, 当  $y \geq 0$  时,  $x$  的取值范围为  $-2 \leq x \leq 6$ ;

(2) 由题意得  $B_2(6-n, m)$ ,  $B_3(-n, m)$ ,

函数图像的对称轴为直线  $x = \frac{-2+6}{2} = 2$ .

$\therefore$  点  $B_2$ 、点  $B_3$  在二次函数图象上且纵坐标相同,

$$\therefore \frac{6-n+(-n)}{2} = 2, \therefore n=1,$$

$$\therefore m = -\frac{1}{2} \times (-1)^2 + 2 \times (-1) + 6 = \frac{7}{2},$$

$\therefore m, n$  的值分别为  $\frac{7}{2}, 1$ .

2. (2019 山东威海, 23, 10) 在画二次函数  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 的图象时, 甲写错了一次项的系数, 列表如下

|                |       |    |   |   |   |   |       |
|----------------|-------|----|---|---|---|---|-------|
| $x$            | ..... | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | ..... |
| $y_{\text{甲}}$ | ..... | 6  | 3 | 2 | 3 | 6 | ..... |

乙写错了常数项, 列表如下:

|                |       |    |    |   |   |    |       |
|----------------|-------|----|----|---|---|----|-------|
| $x$            | ..... | -1 | 0  | 1 | 2 | 3  | ..... |
| $y_{\text{乙}}$ | ..... | -2 | -1 | 2 | 7 | 14 | ..... |

通过上述信息, 解决以下问题:

(1) 求原二次函数  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ) 的表达式;

(2) 对于二次函数  $y=ax^2+bx+c$  ( $a \neq 0$ ), 当  $x$  \_\_\_\_\_ 时,  $y$  的值随  $x$  的值增大而增大;

(3) 若关于  $x$  的方程  $ax^2+bx+c=k$  ( $a \neq 0$ ) 有两个不相等的实数根, 求  $k$  的取值范围.

**【解题过程】** (1) 因为根据甲同学的错误可知  $c=3$ ,

根据乙同学提供的数据, 选择  $x=-1$ ,  $y=-2$ ;  $x=1$ ,  $y=2$  代入

$$\text{得} \begin{cases} -2=a-b+3 \\ 2=a+b+3 \end{cases}, \text{解得} \therefore \begin{cases} a=-3 \\ b=2 \end{cases},$$

$$\therefore y = -3x^2 + 2x + 3;$$

(2)  $y = -3x^2 + 2x + 3$  的对称轴为直线  $x = \frac{1}{3}$ ,

∵二次项系数为-3, 故抛物线开口向下,

∴当  $x \leq \frac{1}{3}$  时,  $y$  的值随  $x$  的值增大而增大;

故答案为  $\leq \frac{1}{3}$ ;

(3) ∵方程  $ax^2+bx+c=k$  ( $a \neq 0$ ) 有两个不相等的实数根,

即  $-3x^2+2x+3-k=0$  有两个不相等的实数根,

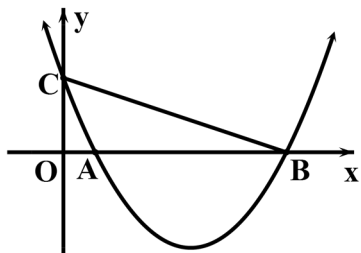
∴  $\Delta=4+12(3-k)>0$ ,

解得  $k < \frac{10}{3}$ .

3. (2019·泰州)如图,在平面直角坐标系  $xOy$  中,二次函数图象的顶点坐标为  $(4, -3)$ ,该图象与  $x$  轴相交于点  $A$ 、 $B$ ,与  $y$  轴相交于点  $C$ ,其中点  $A$  的横坐标为 1.

(1)求该二次函数的表达式;

(2)求  $\tan \angle ABC$ .



第 3 题图

【解题过程】(1)因为二次函数图象的顶点坐标为  $(4, -3)$ , 设该二次函数表达式为  $y=a(x-4)^2-3$ , 因为图象与  $x$  轴相交于点  $A$ ,  $A$  的坐标为  $(1, 0)$ , 把  $A$  的坐标代入  $y=a(x-4)^2-3$ , 解得  $a=\frac{1}{3}$ , 所以  $y=\frac{1}{3}(x-4)^2-3$ ;

(2)令  $x=0$ , 得  $y=\frac{7}{3}$ , 所以  $C(0, \frac{7}{3})$ ,  $OC=\frac{7}{3}$ , 令  $y=0$ , 得  $x_1=1, x_2=7$ , 所以  $B(7, 0)$ ,  $OB=$ , 所以在  $Rt\triangle OBC$  中,  $\tan \angle ABC = \frac{OC}{OB} = \frac{1}{3}$ ;

4. (2019·宁波)如图, 已知二次函数  $y=x^2+ax+3$  的图形经过点  $P(-2, 3)$ .

(1)求  $a$  的值和图象的顶点坐标;

(2)点  $Q(m, n)$  在该二次函数图象上:

①当  $m=2$  时, 求  $n$  的值;

②若点  $Q$  到  $y$  轴的距离小于 2, 请根据图象直接写出  $n$  的取值范围.

解: (1)把  $P(-2, 3)$  代入  $y=x^2+ax+3$ , 得  $3=(-2)^2+a(-2)+3$ , 解之, 得  $a=2$ , ∴  $y=x^2+2x+3=(x+1)^2+2$ , ∴ 顶点坐标为  $(-1, 2)$ ;

(2)①把  $x=2$  代入  $y=x^2+2x+3$ , 得  $y=11$ , ∴ 当  $m=2$  时,  $n=11$ ;

②当点  $Q$  到  $y$  轴的距离小于 2 时, 即  $-2 < m < 2$ , 函数可以取得最小值为 2, 当  $x=-2$  时,  $y=3$ , 当  $x=2$  时,  $y=11$ , ∴  $n$  的取值范围为  $2 \leq n < 11$ .